

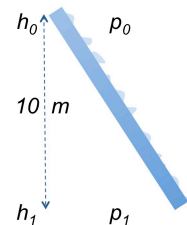
ESERCIZI SVOLTI

Capitolo 11

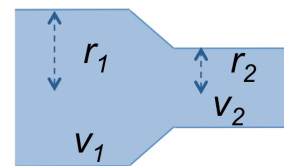
1. Dalla equazione di continuità calcoliamo la portata facendo attenzione ai dati che sono forniti in differenti sistemi di unità. Se portiamo in dati nel SI: $Q = S \cdot v = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 0,03^2 \cdot 3 = 8,48 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 8,48 \text{ lt/s}$. Dall'equazione di continuità si ricava la velocità nella parte ridotta: $v_r = S \cdot v / S_r$. La sezione si riduce alla metà per cui $v_r = S \cdot v / S_r = 2 \cdot S_r \cdot v / S_r = 6 \text{ m/s}$.

2. Il liquido che esce dal condotto e cade compie, nel tempo che arriva a terra $t = \sqrt{2y/g}$, un tratto orizzontale $x = v \cdot t$; da cui $v = x / \sqrt{2y/g}$. Inserendo i dati secondo il SI si ha $v = 1,57 \text{ m/s}$. Il condotto ha una sezione $S_r = \frac{1}{2} S$ dell'esercizio precedente, e la portata è allora $Q = S_r \cdot v = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot v = \frac{1}{2} \pi 0,03^2 \cdot 1,57 = 2,21 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 2,21 \text{ lt/s}$.

3. Dal teorema di Bernoulli valutiamo la velocità finale come $v = \sqrt{2g(h_0 - h_1) + (p_0 - p_1)/\rho}$ con ρ la densità del liquido; supponendo che h_1 e p_0 siano nulli, inserendo i valori secondo il SI e supponendo si tratti di acqua si ha che $v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 10 - 1,013 \cdot 10^5 / 1000} = 9,73 \text{ m/s}$.



4. Dal teorema di Bernoulli ricaviamo la Δp fra le due sezioni. Poiché il condotto è orizzontale il termine ρgh non interviene e $\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$, come da disegno; dalla equazione di continuità al posto delle velocità inseriamo $v = Q/S$ e $\Delta p = \frac{1}{2} \rho \cdot Q^2 (1/S_1^2 - 1/S_2^2)$. Inserendo i valori secondo il SI otteniamo un Δp negativo poiché la pressione nella zona più stretta è maggiore di quella nella zona più larga. $\Delta p = -2,78 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.



5. L'esercizio fa riferimento alla figura 11.9, dove è mostrato un tubo di Venturi; nei manometri l'acqua sale fino a che la pressione interna eguaglia la pressione di Stevino $\rho \cdot g \cdot h$. Per calcolare la portata consideriamo il teorema di Bernoulli; il termine con l'altezza lo si può trascurare e così si ha una relazione fra velocità e pressione. Qui dobbiamo fare attenzione alla nomenclatura, il termine $\rho \cdot g \cdot h$ è la pressione di Stevino ma è scritto allo stesso modo anche il termine di energia potenziale che appare nel trinomio di Bernoulli. La differenza, fondamentale, è che nel termine di Stevino la quantità h è la profondità a cui si misura la pressione. In Bernoulli la quantità h è invece la distanza rispetto ad una superficie equipotenziale rispetto alla quale misuriamo l'energia potenziale. È questa quantità che si trascura nel caso di condotti orizzontali.

Ritorniamo all'esercizio; nelle due sezioni il trinomio di Bernoulli diventa $\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh_2$ ed eliminando la densità si ha $v_2^2 - v_1^2 = g(h_1 - h_2)$ e poiché la portata è $Q = S \cdot v$ possiamo scrivere la relazione come $Q^2 (1/S_2^2 - 1/S_1^2) = g(h_1 - h_2)$. In questa relazione solo la

portata è incognita per cui $Q = \sqrt{g(h_1 - h_2) / (1/S_2^2 - 1/S_1^2)}$ e sostituendo i valori secondo il SI si ha $Q = 1,82 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 1,82 \text{ lt/s}$.

6. La posizione più alta del liquido nel manometro che esce dalla scatola indica che la pressione nel condotto è maggiore; di conseguenza il condotto nella scatola si allarga.
7. La velocità di sedimentazione è data dalla relazione (11.36). Inserendo i valori in base al sistema CGS e avendo che $\rho_{Cu} = 8,96 \text{ g/cm}^3$ si ottiene che $v = 2,53 \text{ cm/s}$.

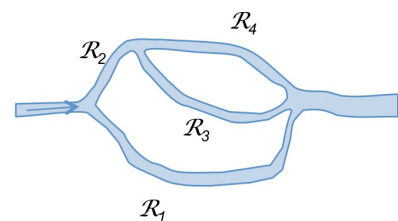
8. Il corpo che sedimenta è una sferetta; scriviamo la relazione (11.37) con l'espressione della forza viscosa (11.35) $m dv / dt = p - A - 6\pi r \cdot \eta \cdot v$; dividendo per la massa e seguendo l'equazione differenziale di pag 18 ($df / dt = A + B \cdot f$) scriviamo ancora $dv / dt = C + D \cdot v$, avendo posto $C = (p - A)/m$ e $D = -6\pi r \cdot \eta / m$. Secondo la (1.30) la soluzione è $v = v_0 e^{Dt} + C/D(e^{Dt} - 1)$ e poichè la pallina inizialmente è ferma, $v_0 = 0$, la soluzione si riduce a $v = C/D(e^{Dt} - 1)$.

Il coefficiente D è negativo e la velocità massima si raggiunge per t molto grande in quanto l'esponenziale va a zero; si ottiene $v_{max} = -C/D$, che è anche l'espressione (11.36); inserendo i valori, $v_{max} = 1,37 \text{ cm/s}$. L'istante in cui $v_{99\%} = 0,99 \cdot v_{max}$ si deduce da $C/D \cdot (e^{Dt} - 1) = -0,99 \cdot C/D$ e semplificando $e^{Dt} = 0,01$; passando ai logaritmi $t_{99\%} = \ln(0,01)/D$ che è positivo in quanto $\ln(0,01)$ e D sono entrambi negativi.

Il coefficiente $D = -6\pi r \cdot \eta / m$, con $m = \rho_{Cu} \cdot V = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_{Cu}$. Si ottiene che $D = -6\pi r \cdot \eta / (\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_{Cu}) = -\frac{9}{2} \eta / (r^2 \cdot \rho_{Cu}) = -602,68 \text{ P} \cdot \text{cm/g}$ da cui $t_{99\%} = 7,64 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Un tempo estremamente basso. Per calcolare lo spazio percorso occorre calcolare $s = \int_0^{t_{99\%}} v dt$ fra l'istante iniziale, nullo, e l'istante $t_{99\%}$ in quanto v dipende dal tempo. Con l'Appendice E si ottiene che $s = C/D \cdot (e^{Dt} - 1 - Dt) / D = -1,37 \cdot (e^{\ln 0,01} - 1 - \ln 0,01) / (-602,68)$ ed infine $s = 8,20 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$, circa $80 \mu\text{m}$. La fase transitoria è molto breve e quasi subito si passa al regime a velocità costante.

9. Dalla relazione (11.28) calcoliamo immediatamente la Δp agli estremi : $\Delta p = 8\eta L Q / \pi r^4$. Inserendo i valori secondo il SI $\Delta p = 3,73 \text{ Pa}$.

10. La resistenza idraulica è data da $\mathcal{R} = 8\eta L / \pi r^4$. La figura mostra che $\mathcal{R}_2$ è in serie col parallelo fra $\mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_4$ e il tutto è in parallelo con $\mathcal{R}_1$. Risolviamo i singoli rami e mettiamo insieme i risultati per trovare la resistenza equivalente $\mathcal{R}_{eq}$.



$$\text{parallelo } \mathcal{R}_3 - \mathcal{R}_4 : \frac{1}{\mathcal{R}_{3-4}} = \frac{1}{\mathcal{R}_3} + \frac{1}{\mathcal{R}_4} = \frac{\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4}{\mathcal{R}_3 \cdot \mathcal{R}_4}$$

serie $\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_{3-4}$: $\mathcal{R}_{2-3-4} = \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_{3-4} = \mathcal{R}_2 + \frac{\mathcal{R}_3 \cdot \mathcal{R}_4}{\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4}$

la $\mathcal{R}_{eq}$ è data dal parallelo $\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_{2-3-4}$: $\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2 + \frac{\mathcal{R}_3 \cdot \mathcal{R}_4}{\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4}}$

A questo punto la soluzione può avere due vie, o si inserisce l'espressione della resistenza da cui si vede che, poichè i raggi dei singoli condotti sono uguali, il termine $8\eta / \pi r^4$ si può mettere in evidenza

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{8\eta / \pi r^4} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2 + \frac{L_3 \cdot L_4}{L_3 + L_4}} \right);$$

e inserendo i valori secondo il sistema CGS si ottiene

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 8,9 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{1 + \frac{3 \cdot 4}{3 + 4}} \right) = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^3 / P$$

da cui la resistenza equivalente è $\mathcal{R}_{eq} = 24,92 \text{ P/cm}^3$.

Oppure calcolando le singole resistenze e inserendoli nell'espressione: $\mathcal{R}_1 = 70,74 \text{ P/cm}^3$; $\mathcal{R}_2 = 14,15 \text{ P/cm}^3$; $\mathcal{R}_3 = 42,45 \text{ P/cm}^3$; $\mathcal{R}_4 = 56,60 \text{ P/cm}^3$. In ogni caso il risultato è sempre lo stesso.