

ESERCIZI SVOLTI

Capitolo 8

1. Le masse tutte uguali permettono di valutare il centro di massa come il punto mediano dei vari punti; in particolare le coordinate sono date dalla media delle coordinate dei singoli punti

$$x_{CM} = \sum (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) / 5 = 11 / 5 = 2,2 \text{ e analogamente}$$

$$y_{CM} = \sum (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) / 5 = 20 / 5 = 4.$$

2. Nel caso specifico se m è la singola massa, quella totale è $7 \cdot m$ e quella del primo e ultimo punto è $2 \cdot m$ e ripetendo il calcolo dell'esercizio precedente

$$x_{CM} = \sum (2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2 \cdot x_5) / 7 = 16 / 7 = 2,29 \text{ e analogamente}$$

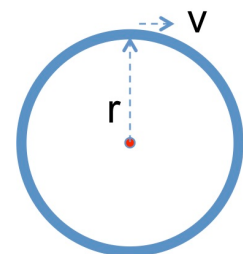
$$y_{CM} = \sum (2 \cdot y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 2 \cdot y_5) / 7 = 25 / 7 = 3,57.$$

3. L'accelerazione del CM è la media delle singole accelerazioni; in questo caso e in riferimento all'esercizio 1 risulta che $a = F/m = 200/0,1 = 2000 \text{ m/s}^2$. Poiché le accelerazioni sui singoli corpi sono le stesse $a_{CM} = 2000 \text{ m/s}^2$.

4. Supponiamo che le singole masse siano inizialmente in quiete; dopo l'intervento delle forze (che supponiamo parallele fra loro e all'asse x) la quantità di moto finale è, per ogni singolo corpo, $mv = Ft$; e poiché le masse sono tutte eguali, la quantità di moto del centro di massa è quella della singola massa $P_{CM} = p = 200 \cdot 10 = 2000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ nella direzione dell'asse x . Possiamo pensare di valutare il momento delle forze riferito all'origine del sistema di assi coordinati e da $\vec{\tau} = \sum (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i)$ ricaviamo

$\vec{\tau} = \sum (x_i \hat{i} + y_i \hat{j}) \wedge F \hat{i} = \sum y_i \hat{j} \wedge F \hat{i} = -(\sum y_i \cdot F) \hat{z}$; inserendo i valori si ottiene che il modulo del momento è $t = -200 \cdot 20 = -2000 \text{ N} \cdot \text{m}$; il verso è opposto a quello dell'asse z .

5. Il momento d'inerzia dell'anello è dato da $I = m \cdot r^2 = 0,12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. In base alla rotazione, il momento della quantità di moto è un vettore perpendicolare alla superficie dell'anello con verso entrante nella pagina. La quantità di moto e il raggio sono perpendicolari fra loro e il modulo cercato è $L = r \cdot m \cdot v = r \cdot m \cdot \omega \cdot r$ ossia $L = m \cdot \omega \cdot r^2 = 0,3 \cdot 10 \cdot \pi \cdot 0,2^2 = 0,38 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

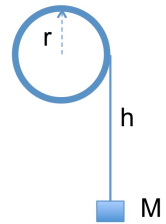


6. l'energia cinetica generale è data dalla relazione (8.24). Nel caso in cui l'anello ruoti intorno al suo asse il centro di massa è fermo e l'espressione diventa $K_{rot} = \frac{1}{2} \cdot I_{c.m.} \cdot \omega^2$, con $\omega = 10\pi/\text{s}$. Il momento d'inerzia è dato nel precedente esercizio e l'energia cinetica è $K = \frac{1}{2} \cdot 0,12 \cdot (10\pi)^2 = 59,22 \text{ J}$. Per

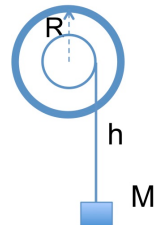
il calcolo dell'energia cinetica per un moto su un piano, occorre aggiungere l'energia cinetica di traslazione $K_{\text{tras}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{CM}}^2$ con $v_{\text{CM}} = \omega \cdot r$; l'energia $K_{\text{tras}} = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot (10\pi)^2 \cdot 0,2^2 = 5,92 \text{ J}$ e quindi $K = K_{\text{tras}} + K_{\text{rot}} = 65,14 \text{ J}$.

7. Dalla relazione (8.14) ricaviamo il modulo del momento delle forze $\tau = I \cdot \alpha$; l'accelerazione angolare è $\alpha = \omega / t = 15,71 \text{ s}^{-2}$ e il momento d'inerzia $I = m \cdot r^2$; inserendo i valori $\tau = 2,5 \cdot 0,2^2 \cdot 10\pi / 2 = 1,57 \text{ N} \cdot \text{m}$.

8. La figura a lato mostra la situazione. Il peso ha speso una energia potenziale $U = Mg \cdot h$ che si è trasformata in energia rotazionale del cilindro con momento d'inerzia $I = \frac{1}{2} m \cdot r^2$ come dalla tabella 1. Dalla relazione (8.23) si ricava la velocità angolare finale $\omega^2 = 2 \cdot K / I = 2 \cdot Mg \cdot h / (\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2)$. Inserendo i valori e operando la radice quadrata si ottiene $\omega = 198 \text{ s}^{-1}$.



9. L'esercizio è simile quello precedente, cambia il raggio su cui è avvolta la corda, $r = 10 \text{ cm}$, e i corpi che sono due. L'energia cinetica rotazionale finale è $K_f = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$ da cui $\omega^2 = K_f / I = Mg \cdot h / I$; il momento d'inerzia è $I = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2) = m \cdot R^2$ da cui $\omega^2 = Mg \cdot h / m R^2$; inserendo i valori e operando la radice quadrata si ottiene $\omega = 49,50 \text{ s}^{-1}$.



10. L'esempio 4 fornisce le indicazioni per risolvere il problema. Lì il corpo scende da un'altezza h e si desidera la velocità finale, qui il corpo sale fino ad un'altezza h e si desidera la velocità iniziale. La conservazione dell'energia cinetica indica che le due velocità sono uguali e pertanto $\frac{1}{2} \cdot I_{\text{c.m.}} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = mg \cdot h$. Con $\omega = v/r$ la velocità iniziale è

$$v = \sqrt{\frac{2 m g h}{I / r^2 + m}}$$

Il momento d'inerzia della sfera è $I = \frac{2}{5} \cdot m r^2$ e posto dentro l'espressione della velocità fornisce $v = \sqrt{10 \cdot g \cdot h / 7} = 3,74 \text{ m/s}$.