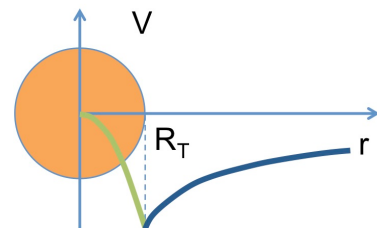


ESERCIZI SVOLTI

Capitolo 7

1. Poichè la carica, positiva, si trova al centro, campo e superficie hanno stessa direzione e stesso verso. Il flusso elementare è quindi $d\Phi = E \cdot dS$ e il flusso per una semicirconferenza è $\Phi = q / 2\epsilon_0 = 3 \cdot 10^{-6} / 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = 1,69 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{m/C}$
2. Per questioni di simmetria la carica sulla superficie equivale ad un carica dello stesso valore posta al centro della sfera, per cui il campo è assiale con verso uscente (la carica è positiva) e modulo alla distanza di 1 m dal centro $E = 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-6} / 1 = 8,86 \cdot 10^{-18} \text{ N/C}$.
3. Il problema è risolto dal paragrafo "campo di gravità all'interno della Terra"; con risultato l'espressione (7.18); l'andamento del campo gravitazionale è descritto nella figura 7.11.
4. Il potenziale gravitazionale lo ricaviamo dal lavoro del campo, $d\mathcal{L} = \vec{G} \cdot d\vec{s}$. Il campo è assiale e conviene calcolare il lavoro lungo una linea che ha origine al centro della Terra; ne deriva che $d\mathcal{L} = G \cdot dr$. Esternamente alla Terra il campo è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, da cui $d\mathcal{L} = k_N \cdot M_T / r^2 \cdot dr = d(-k_N \cdot M_T / r) = -dV$ (trovando dall'Appendice E la funzione primitiva di dr/r^2). Il potenziale varia come $V = k_N M_T / r$. Il campo all'interno della Terra è proporzionale alla distanza dal centro e $d\mathcal{L} = k_N \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r \cdot dr = -dV$; anche qui $-dV = \frac{4}{3}\pi \cdot k_N \cdot \rho \cdot d(\frac{1}{2} \cdot r^2)$ da cui il potenziale $V = \frac{2}{3}\pi \cdot k_N \cdot \rho \cdot r^2$. All'interno della Terra il potenziale (che è negativo) cresce come la distanza dal centro al quadrato e all'esterno decresce come l'inverso della distanza. Sulla superficie saranno uguali. Nella figura la linea in verde è il potenziale dentro la Terra e la linea blu l'andamento all'esterno della Terra; la palla arancio la Terra.
5. Il campo all'interno di una massa è $G = \frac{4}{3}\pi \cdot k_N \cdot \rho \cdot r$, proporzionale alla distanza dal centro. Affinchè il campo sia costante il prodotto $\rho \cdot r$ dovrà essere costante. La densità varierebbe come l'inverso della distanza e avrebbe valori altissimi al centro della Terra, contro ogni aspettative dei modelli geologici.
6. Il campo gravitazionale varia come $1/r^2$ e a 400 km di altezza diventa $G = k_N \cdot M_T / (6371 + 400)^2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} / 6771^2 = 8,69 \text{ m/s}^2$, un valore simile a quello sulla superficie terrestre.



7. La velocità di caduta è $v = \sqrt{2gh}$. Come visto dall'esercizio precedente l'accelerazione di gravità varia con l'altezza. Se consideriamo che questa variazione sia lineare con h possiamo prendere il valore medio fra $9,8 \text{ m/s}^2$ sulla Terra e $8,4 \text{ m/s}^2$ a circa 500 km , $9,1 \text{ m/s}^2$. In questo modo $v = \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 5 \cdot 10^5} = 3016,6 \text{ m/s}$. Fonderebbe nell'atmosfera.
8. La carica q prima di entrare nella sfera e così annullare il flusso del campo, deve percorrere un tratto $s = 4 \text{ m}$. il tempo necessario è $t = \sqrt{2s/a} = \sqrt{2 \cdot 4 / 8} = 1 \text{ s}$
9. Un record di salto in alto implica che l'atleta sviluppa una energia potenziale di mgh . Anche se su Marte l'energia sviluppata è sempre la stessa, la massa resta costante e il prodotto $g_M \cdot h_M = g_T \cdot h_T$ è costante da cui $h_M = 6,9 \text{ m}$.
10. Il campo è lineare con la distanza dal centro; se diminuisce del 10% si ha che $G_{T-h} = 0,1 \cdot G_T$, ed esplicitando $\frac{4}{3}\pi \cdot k_N \cdot \rho \cdot (R_T - h) = 0,1 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot k_N \cdot \rho \cdot R_T$, ossia $h = R_T - 0,1 \cdot R_T = 0,9 R_T = 0,9 \cdot 6371 = 5734 \text{ km}$.